

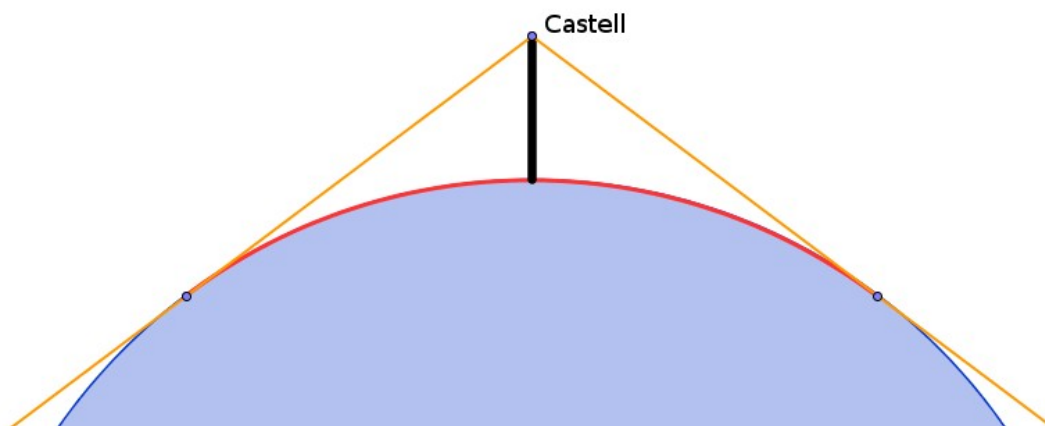
# EL CASTELL D'ALARÓ: LA PROVA QUE LA TERRA ÉS RODONA

Josep Lluís Pol i Llopart, febrer de 2016

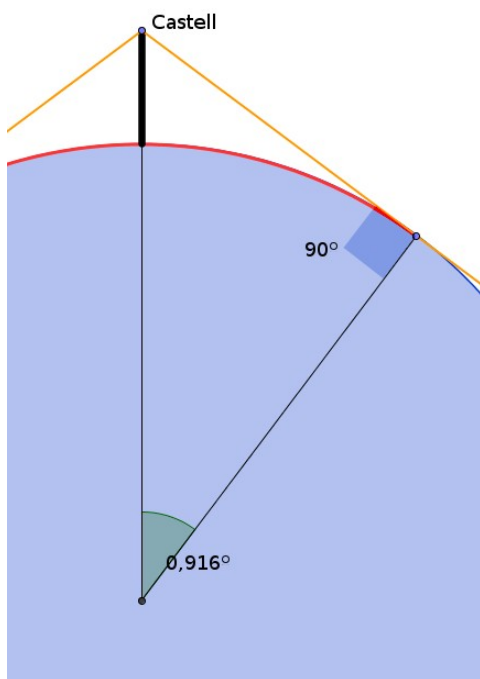
El Castell d'Alaró té molts atractius des d'una àmplia varietat de caires però tal vegada ens sorprendrà saber que el seu cim guarda també la prova que la Terra és rodona. Tots hem estudiat a l'escola allò que els vells mariners ja sabien de la corba de la mar en veure desaparèixer les quilles dels vaixells sota l'horitzó abans que no ho fes el velam.

En el cas de la nostra muntanya, els donats saben bé que els dies clars ens regalen la visió d'una panoràmica magnífica que abraça totes les Illes Balears. Menorca a llevant, Cabrera cap a migjorn, Eivissa cap a llebeig i Formentera... Formentera? No! Aquesta illa, petita i empegueïdora, es resisteix a deixar-se fotografiar des del mirador de l'Hostatgeria. Anem a veure per què.

Qualsevol punt elevat sobre la mar, abraça sempre un casquet esfèric (un tros de món rodó) el conjunt de punts del qual es pot veure sencer si no hi ha cap impediment físic, ja està clar, com ara altres muntanyes. Lògicament, com més elevat sigui aquest punt, més superfície directament visible tindrà.



En el croquis anterior, el Castell d'Alaró ve simbolitzat pel punt C, i el casquet esfèric que abraça la vista està pintat de vermell. Més enllà d'aquesta línia vermella, un observador que estigui al Castell no podrà veure mai res que estigui al nivell de la mar, perquè la pròpia Terra ho tapa.

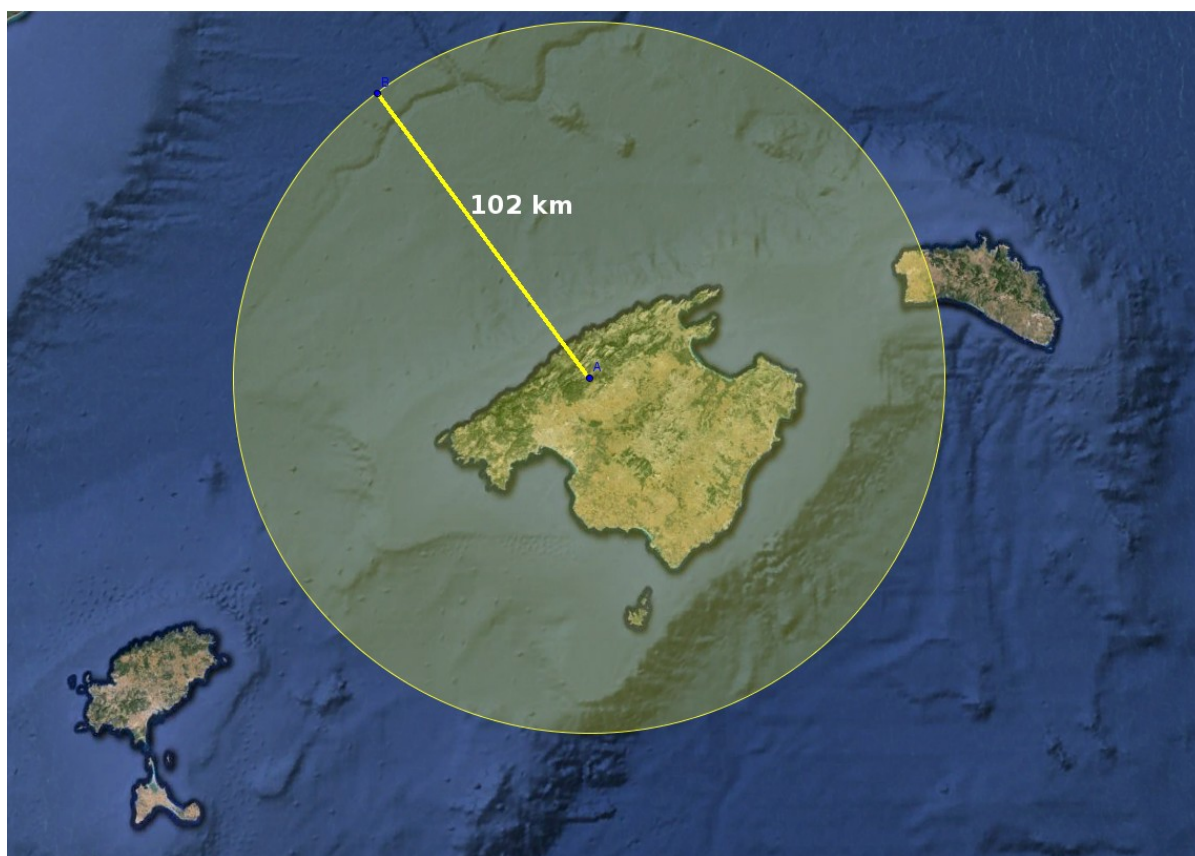
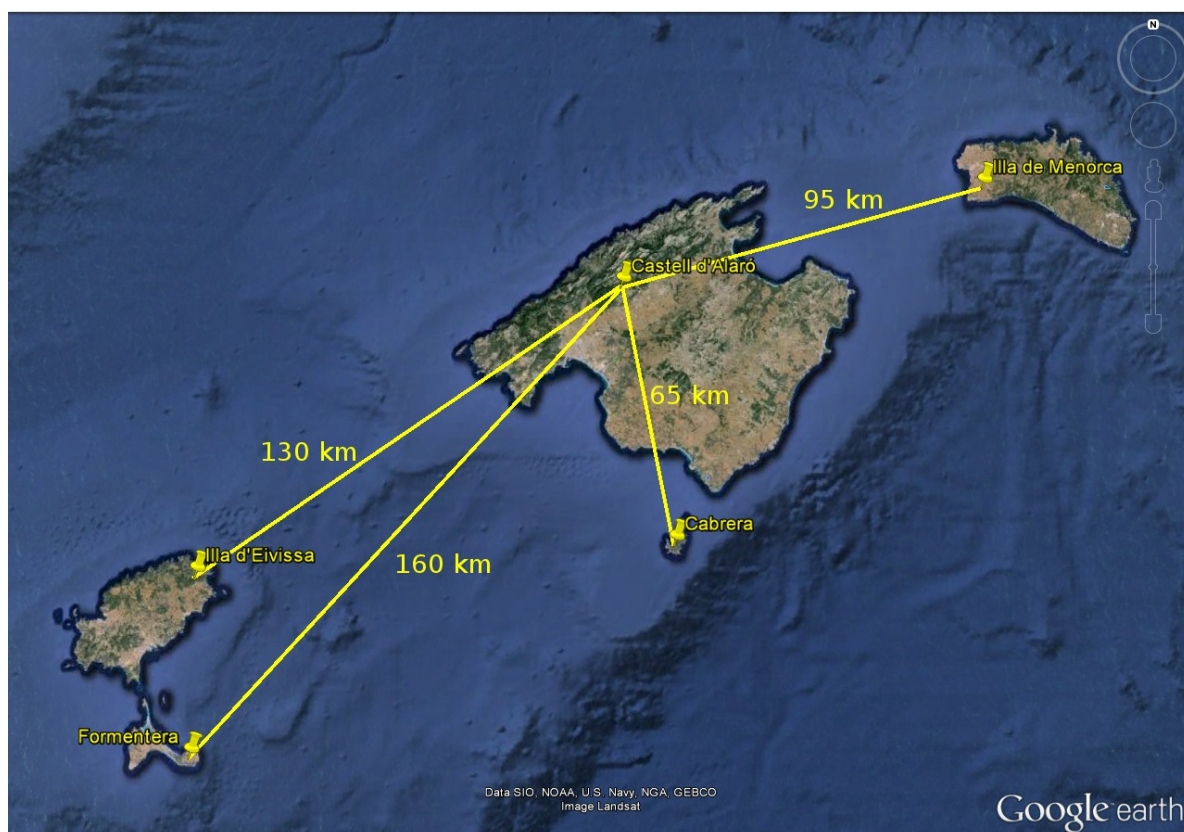


Una primera qüestió seria doncs quina longitud d'arc terrestre abraça la vista des del Castell cap a la mar? És a dir, a quina distància està la línia de l'horitzó de la miranda del Castell?

Si ens fixam en el croquis, la visual a l'horitzó (línia carbassa) i el radi de la Terra al punt de tangència formen un angle recte. Això fa que, per trigonometria bàsica<sup>1</sup>, si sabem el radi de la terra (6366 km) i l'altura del mirador del Castell (814 m), puguem calcular l'angle que abraça els dos punts. Aquest angle no arriba ben bé a 1° (0,916192°). (L'angle del croquis està exagerat per facilitar la seva interpretació.)

Ara, una senzilla regla de tres<sup>2</sup> ens diu que si la volta completa a la Terra (360°) abraça 40.000 km, 0,916° abraçaran... 102 km! És a dir, que des del Castell d'Alaró es pot veure qualsevol vaixell que navegui a una distància de no més de 102 km (línia vermella). (Si volguéssim saber la distància real en línia recta (línia carbassa) del Castell a l'horitzó hauríem de cridar l'amic Pitàgores. Això ens donaria una longitud de 102 km, pràcticament igual.)<sup>3</sup>

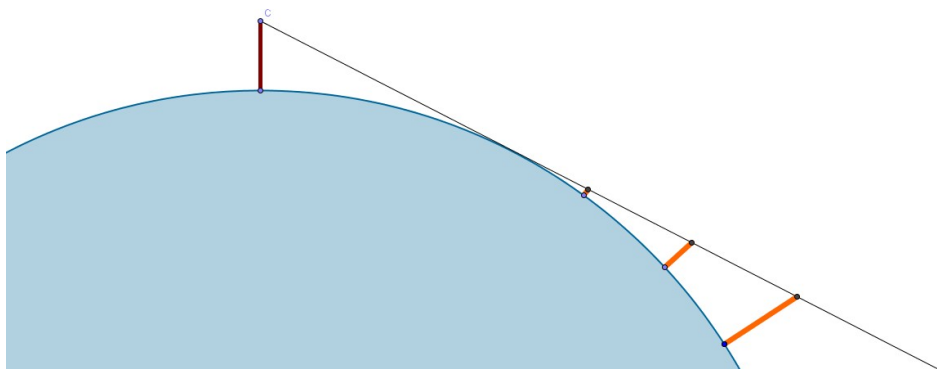
Per tant, el que necessitam saber a continuació és a quina distància sobre l'arc terrestre es troben les altres illes Balears respecte del Castell d'Alaró. Heus ací dues imatges amb les dades que hem extret a partir del *Google Earth*.



Com es pot comprovar a les imatges anteriors, només l'arxipèlag de Cabrera i un tros de Menorca queden incloses dins del casquet de 102 km que ens permet la vista directa de qualsevol objecte al nivell

de la mar. Això vol dir que, en el cas de Menorca, podríem arribar a veure -en dies molt clars- l'arena de les platges de Ciutadella, l'Arenal de Son Saura, Cala en Turqueta, Cala Macarella i, just just, Cala Galdana. En canvi, d'Eivissa i de Formentera no podem veure mai cap platja ni res que estigui al nivell de la mar ja que ultrapassen la distància màxima de 102 km.

Però que no puguem veure res que estigui al nivell de la mar, no vol dir que no puguem veure res. Només és que a partir d'aquesta distància (102 km), els objectes hauran de tenir un mínim d'altura per contrarestar la curvatura de la Terra. Fixe'm-nos en el pròxim croquis:



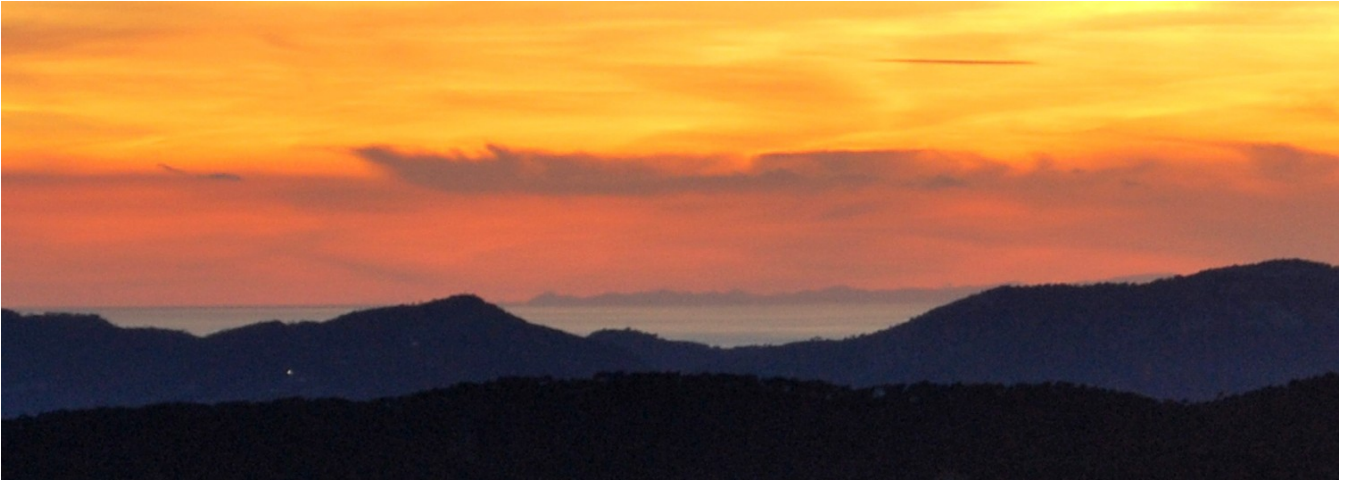
Els tres segments de color carbassa estan més lluny que l'horitzó visible. Per això, l'altura mínima que necessiten aquests tres punts per ser visibles des del Castell, augmenta (i no linealment) a mesura que ens allunyam. Ara, també amb càlculs de trigonometria bàsica<sup>4</sup> i l'ajut d'un full de càlcul, podem establir quina és l'altura mínima necessària per veure terra més enllà de l'horitzó visible de la mar. Anem a veure el cas d'Eivissa. Hem vist que els primers turons d'aquesta illa es troben a 130 km del Castell.

	A	B	C	D	E	F	G	H	
1	<b>CÀLCUL D'ALÇADES VISIBLES DES DEL CASTELL D'ALARÓ</b>								
2	(Aquest full de càlcul només necessita saber la distància sobre la Terra entre un punt i el castell d'Alaró. Resultat en verd)								
3									
4	Distància al castell (km):		130	Angle (º) des del centre de la Terra (a):			1,17000000	(a)	
5									
6	Altura mirador Castell (m):		814	Altura mínima visible de l'altre punt (m):			62		
7									
8	CÀLCULS								

Segons això, a partir de 62 m d'alçada, ja podem veure les elevacions corresponents de la germana major de les Pitiüses. Com que les altures són superiors, hem de concloure que, tot i no veure platges, sí que podem veure les muntanyes eivissenques que siguin superiors a aquesta altura (només els penya-segats de Punta Grossa, a la Cala de Sant Vicenç, un dels dos punts més propers d'Eivissa que està només a 125 km, ja ultrapassen els 100 m d'alçada).

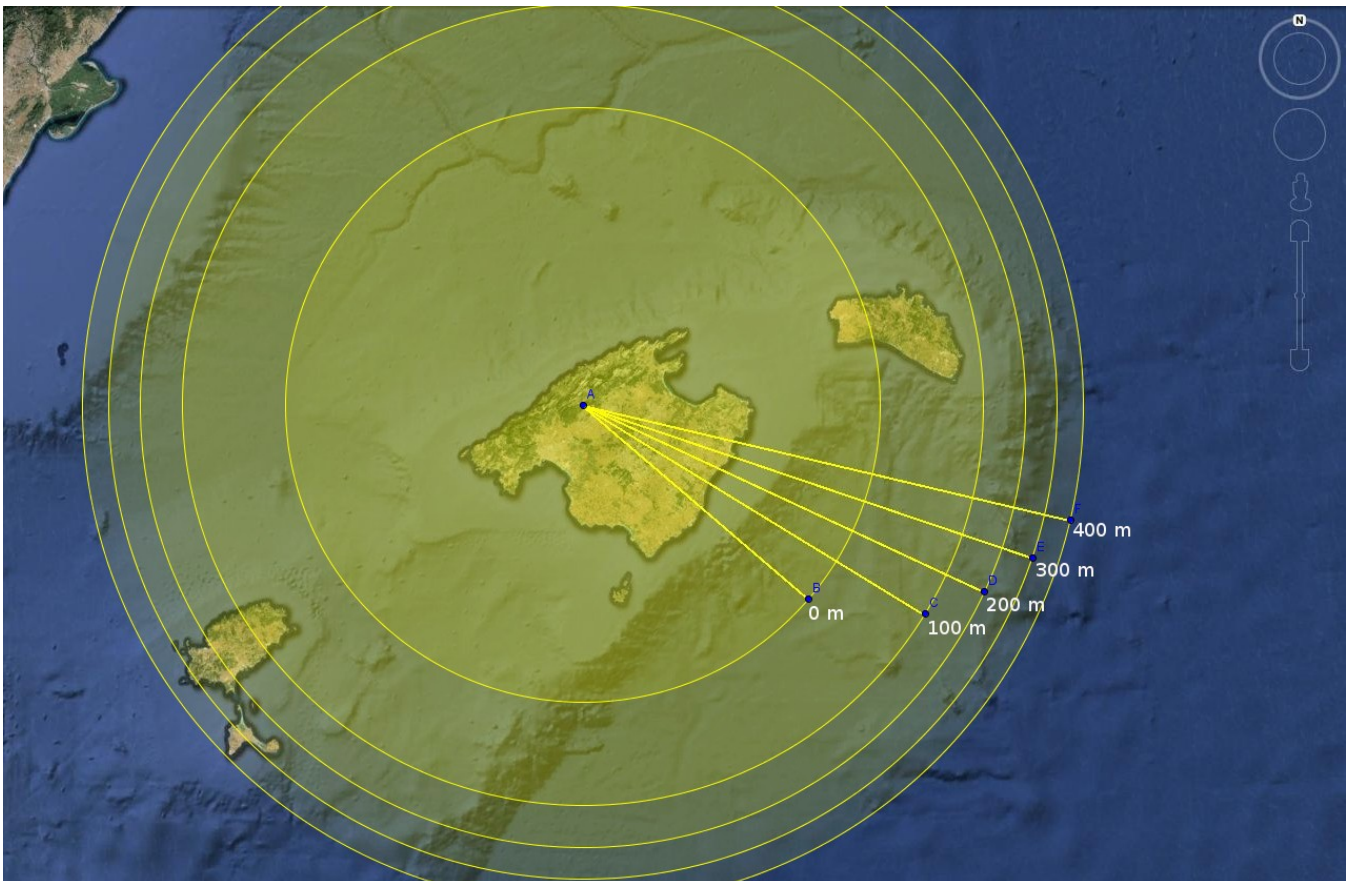
En el cas de Formentera, el punt més alt d'aquesta illa és a la Mola amb una cota de 192 m, que es troba si fa no fa a 160 km del Castell. Però repetint els mateixos càlculs, la Mola hauria de tenir 266 m d'alçada per poder començar a ser vista des del Castell i, per tant, no apareix sobre l'horitzó (mirau la fotografia de la pàgina següent). Tenim així, definitivament, la prova que la Terra és rodona.

*Quod erat demonstrandum!*  
(Que era el que volíem demostrar).



Eivissa des del Castell d'Alaró. Fotografia de Myriam Viña Miralles

Un altre gràfic interessant que es pot fer al respecte, es traçar els diversos horitzons possibles mirats des del Castell, en funció de l'altura mínim necessària per ser albirats. Així ho hem fet per a elevacions que tinguin 0, 100, 200, 300 i 400 m. El resultat ha estat el següent:



Fixe'm-nos com tota Menorca queda dins el radi de 100 m d'alçada i, per tant, qualsevol turó que tinguí, fins i tot alguns metres menys, serà visible des del Castell d'Alaró (sempre que no el tapi alguna altra elevació).

## UN PRECEDENT HISTÒRIC RELEVANT

Sobre el tema de poder albirar altres punts de la geografia propera de Mallorca, tenim alguns episodis memorables que pertanyen a les diverses expedicions realitzades per científics il·lustrats de finals del XVIII. Es tracta del conjunt d'expedicions de l'*Académie des Sciences* francesa per mesurar amb la major precisió possible el meridià de París (que passa per sa Dragonera) i poder establir així el que havia de ser el nou metre patró.

Si bé el treball inicial que havia de servir per crear el metre havia d'anar de Dunkerque a Barcelona, i *de facto* així fou, ben aviat els científics francesos pensaren en allargar la mesura fins a les illes, en un intent de millorar-ne la precisió. Les primeres notícies d'aquesta idea són ja de 1792, just abans de començar els treballs de camp. La idea primigènia hauria estat una proposta al comitè francès del matemàtic espanyol José de Mendoza (Elena Ortega - 1999, *François Arago y Mallorca*, Miquel Font Editor, pàg. 22). Alguns mesos després, Pierre Méchain ja fa seva la idea.



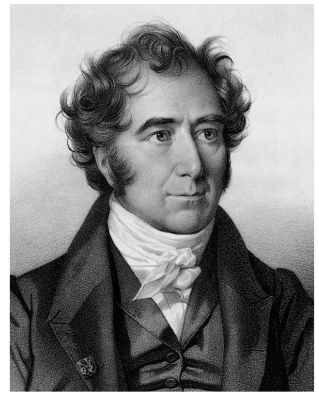
Mendoza



Méchain



Biot



Arago

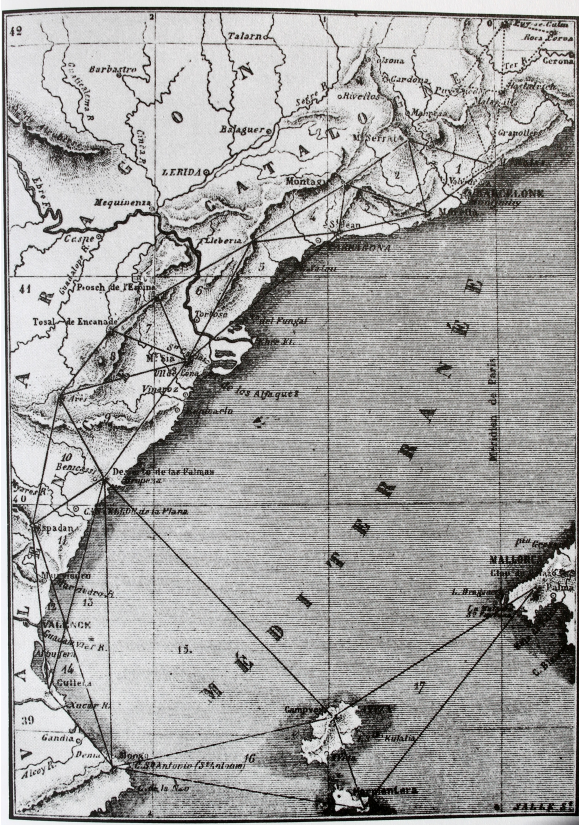
Entre el 14 i el 16 d'octubre d'aquell mateix 1792, Méchain estableix un observatori sobre el punt més alt de la miranda de Sant Jeroni (1236 m) del massís de Montserrat. Segurament allà se n'assabentà que, els dies més clars, podia albirar-se la illa de Mallorca (i així ho indica a l'actualitat una rosa dels vents de metall col·locada en aquest cim).

En efecte, si tornam al full de càlcul, sabent que la distància entre Sant Jeroni (1236 m) i el Puig Major de Son Torrella és de 215 km, això fa que des d'allà es puguin veure els cims de les muntanyes mallorquines que tinguin més de 630 m, aproximadament. I el Puig Major en tenia, llavors, 1443. És a dir, que es pot veure gairebé tota la serra des d'Andratx a Pollença.

Però de fet, la primera observació de la que tenim constància és del 16 de desembre d'aquell mateix any, quan l'espanyol González encén reverbers (foc amb miralls) al mateix cim de la sella de Son Torrella (el Puig Major). El reverber que González encengué fou percebut per Méchain des de Montjuïc amb el seu telescopi però no amb el cercle repetidor que era l'instrument necessari per fer les pertinents triangulacions. El projecte de les Illes quedaria ajornat i Méchain tornà a París.

En realitat, Méchain tingué una sortada de poder veure el reverber ni que fos amb el telescopi. Sabent que la distància entre el petit cim de Montjuïc (178 m) i el cim del Puig Major de Son Torrella és de 181 km, això ens dóna una alçada mínima de 1398 m. És a dir, que l'únic que es pot veure de totes les Illes Balears des de Montjuïc és el con sumital del Puig Major!

Tot i que l'acta de naixement del metre duu data de 10 de desembre de 1799, el *Bureau des Longitudes* tornà proposar l'amidament del meridià més enllà de Barcelona fins a les Illes, cosa que Napoleó aprovà el setembre de 1802. El següent intent de triangulació des de la península amb les illes el faria altre pic Méchain la tardor de 1803 des de la serra del Montsià (764 m), tot i que ja havia estat avisat per un tal Francisco Planes que no era possible l'albirament de l'illa d'Eivissa (Elena Ortega, *idem*, pàg. 23).



Plànol de la triangulació de 1806-1808 (Bigourdan, Observatoire de Paris). Citat per Pierre Bayart (2012): *El meridià blau: el meridià de Formentera* Editorial Mediterrània, Eivissa

Efectivament, els càlculs ens confirmen que a 200 km de distància, el punt més alt de l'illa és sa Talaia, amb 475 m d'alçada, però a aquesta distància, per ser visible des del punt més alt de la Serra del Montsià, hauria de tenir 807 m. (Amb l'illa de Mallorca no hi havia problema perquè tot i estar a 213 km, l'altura mínima seria de 1028 m)

És al final de tota aquesta apassionant història, una aventura d'herois en la que el mateix Méchain hi perdé la vida, que François Arago i Jean-Baptiste Biot realitzaren la darrera observació geodèsica entre Mallorca, Eivissa i Formentera des del cim de la Mola de s'Esclop, que a més de ser més alta que el Castell d'Alaró, està una mica més a prop. Era el 17è triangle entre Barcelona i Mallorca i es tancava una pàgina memorable de savis encuriosits per canar el món.

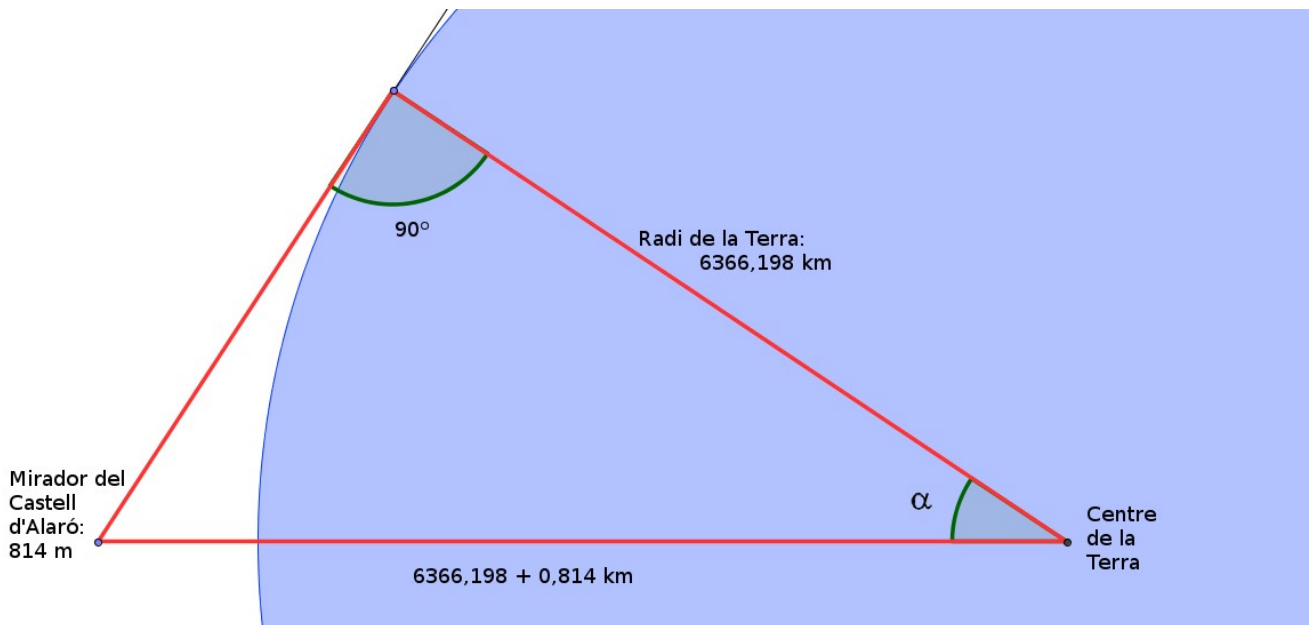
Facem els darrers càlculs. La Mola de s'Esclop té 927 m i es troba a una distància de 131 km de Sa Talaiassa, el punt més alt de la Mola de Formentera. Això fa que la altura mínima visible a aquesta distància sigui només de 39 m (ja hem dit que la mola en fa 192). De fet, en el cas d'Eivissa, no es feu servir el cim més alt, sa Talaia, sinó que es col·locaren els reverbers al cim del Camp Vell.



Restes de l'observatori geodèsic de François Arago al cim de la Mola de s'Esclop, Mallorca

# ANOTACIONS MATEMÀTIQUES

## 1. Càlcul de l'angle terrestre entre el Castell d'Alaró i el punt de tangència visual amb la mar



El cosinus d'un angle en un triangle rectangle és la relació entre el catet contigu i la hipotenusa. Com que en aquest cas els coneixem tots dos, sabem el valor d'aquest cosinus i, per tant, el valor de l'angle.

$$\cos \alpha = 6366,198 / 6367,012 = 0,9998722 \quad \text{per tant,} \quad \alpha = \arccos 0,9998717 = 0,91619227^\circ$$

## 2. Càlcul de la distància màxima a la qual es pot veure un objecte al nivell de la mar des del Castell

No és casualitat que la volta completa a la Terra siguin exactament 40.000 km, sinó que precisament el metre es va fer dividint la quarta part d'aquesta volta (des del Pol Nord a l'Equador) sobre el meridià de París en 10.000.000 de trossos. Per tant, un quart de volta són 10.000 km i la volta sencera, 40.000. Per tant, els km que corresponen a cada grau seran

$$40.000 / 360 = 111,111 \text{ km}$$

i per tant, amb l'angle de l'apartat 1,

$$111,111 \times 0,91619227^\circ = 102 \text{ km}$$

## 3. Càlcul de la distància en línia recta del mirador del Castell a la línia d'horitzó

Segons el teorema de Pitàgores,

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

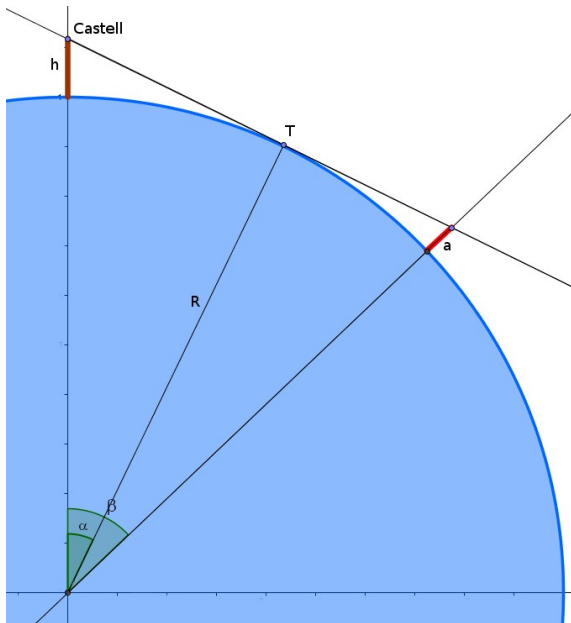
Llavors, com que coneixem un catet i la hipotenusa

$$6367,012^2 = 6366,198^2 + c_2^2$$

i per tant, la distància cercada és

$$c_2 = \text{arrel quadrada de } (6367,012^2 - 6366,198^2) = 102 \text{ km}$$

#### 4. Com calcular l'altura mínima necessària per veure un punt que està més enllà de l'horitzó visible



Per realitzar aquest càlcul, el que farem serà definir les equacions de dues rectes. Una recta serà la visual des del Castell d'Alaró cap al punt de tangència amb la Terra. L'altra recta serà la que sortint del centre de la terra, passi pel punt del qual en volem saber l'altura mínima. La intersecció d'aquestes dues rectes (sistema d'equacions) ens definirà el primer punt visible i, per tant, l'alçada mínima necessària (segment vermell).

Les dades necessàries per fer aquests càlculs seran l'angle  $\alpha$  del Castell al punt de tangència (calculat al punt 1) i l'angle  $\beta$  del Castell al punt per veure (càlcul invers del punt 2). El radi de la Terra R i l'alçada del Castell h.

La primera equació es defineix a partir dels dos punts:

$$C (0, R+h) \text{ i } T (R\sin\alpha, R\cos\alpha)$$

Aquests dos punts defineixen un pendent m de la recta que serà:

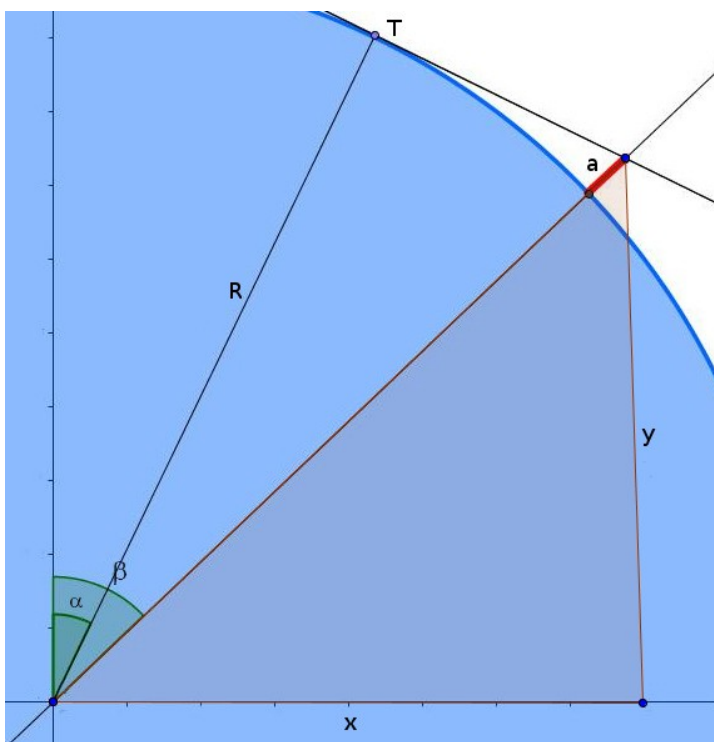
$$m = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1) \quad m_1 = (R\cos\alpha - R+h) / (R\sin\alpha)$$

amb el pendent de la recta (m) i el punt per on talla l'eix d'ordenades  $(x_0, y_0)$ , l'equació de la recta queda definida com:

$$y = mx + y_0, \text{ que en el nostre cas serà } y = m_1x + (R+h) \quad (1a \text{ Equació})$$

Com que sabem l'angle  $\beta$ , l'equació de la segona recta es pot definir a partir de l'angle complementari sabent que el pendent de la segona recta serà  $m_2 = \tan(90 - \beta)$  i que, com que passa per l'origen de coordenades, no tindrà terme independent

$$y = m_2x \quad (2a \text{ Equació})$$



Una vegada resolt el sistema d'equacions, hem de recordar els valors de la x i de la y obtinguts són les coordenades del punt que cercam i que, per tant, formen un triangle rectangle amb el segment que va des del punt trobat al centre de la Terra. D'aquesta manera, tornant a aplicar el teorema de Pitàgores, obtindrem la distància d'aquest punt al centre de la Terra. El que ultrapassi el radi de la Terra, serà l'altura mínima (a) necessària per ser albirat des del Castell. És a dir:

$$x = (R+h) / (m_2 - m_1)$$

$$y = m_2 \cdot (R+h) / (m_2 - m_1)$$

I, finalment

$$a = \text{arrel quadrada } (x^2 + y^2) - R$$